Danilo Saccoccioni

- LAVORO -
- ENERGIA MECCANICA -
- POTENZA -

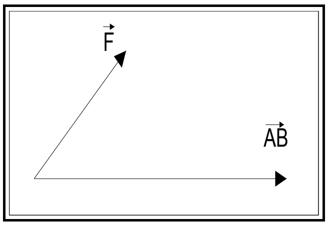
LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA RELATIVAMENTE A UNO SPOSTAMENTO

Diamo la definizione di lavoro compiuto da una forza relativamente a uno spostamento, distinguendo due casi:

CASO 1 *Ipotesi*: *forza costante nel tempo e spostamento rettilineo*

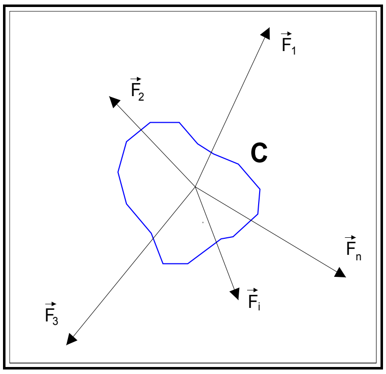
Se un corpo C compie uno *spostamento rettilineo* $\vec{AB}$ e se $\vec{F}$ è una *forza costante* ad esso applicata (tra le eventuali altre forze applicate), si definisce lavoro compiuto da $\vec{F}$ relativamente allo spostamento $\vec{AB}$ il prodotto scalare di $\vec{F}$ e $\vec{AB}$:

$$\boxed{L_{AB}^{(F)}=\vec{F}\cdot\vec{AB}}$$

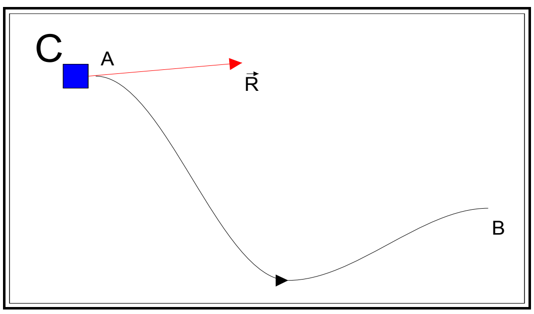


CASO 2 *Caso generale*

Si consideri un corpo C sottoposto a n forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ che, nel caso generale, possono anche variare nel tempo:

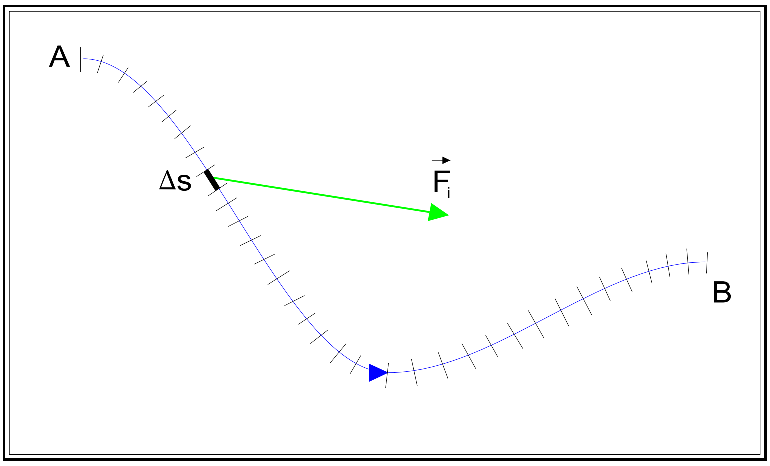


Ovviamente la traiettoria descritta dal corpo dipenderà, istante per istante, dalla risultante $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n$:



Fra tutte le forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ che contribuiscono alla risultante, consideriamo la generica forza $\vec{F}_i$; dividiamo inoltre l'intero percorso AB della figura precedente in tanti tratti sufficientemente piccoli in modo tale che **in ciascun tratto** valgano le ipotesi del CASO 1, ovvero, con buona approssimazione, che i tratti

$\overrightarrow{\Delta s}$ siano considerabili come rettilinei e che la forza $\vec{F}_i$ sia costante:



Sotto tali ipotesi, definiamo il lavoro compiuto da $\vec{F}_i$ relativamente allo spostamento AB la somma dei prodotti scalari di $\vec{F}_i$ e $\overrightarrow{\Delta s}$ su tutto il percorso AB:

$$\boxed{L_{AB}^{(F_i)}=Somma(\vec{F}_i\cdot\overrightarrow{\Delta s})}$$

LAVORO ED ENERGIA CINETICA

Dato un corpo di massa *m* che si muove con velocità istantanea $\vec{v}$ (che in generale dipenderà dal tempo), si definisce energia cinetica posseduta dal corpo la quantità:

$$\boxed{E_c=\frac{1}{2}m\,v^2}$$

Diamo ora l'enunciato di un importantissimo teorema (si faccia costante riferimento alla precedente figura):

TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA

> Il lavoro compiuto dalla risultante $\vec{R}$ di un sistema di forze applicate a un corpo relativamente allo spostamento AB subito dal corpo stesso è pari alla variazione di energia cinetica del corpo tra i due estremi A e B:
>
> $$\boxed{L_{AB}^{(R)}=\Delta E_c=E_{cB}-E_{cA}}\ ,$$
>
> essendo E_{cA} ed E_{cB} le energie cinetiche possedute dal corpo rispettivamente nei punti *A* e *B*.

Dimostrazione

Facendo riferimento alla precedente figura, sappiamo che:

$$L_{AB}^{(R)}=Somma(\vec{R}\cdot\overrightarrow{\Delta s})$$

Valutiamo, ora, il valore del prodotto $\vec{R}\cdot\overrightarrow{\Delta s}$, che risulta essere il lavoro compiuto dalla risultante nel generico trattino del percorso.
Siano P_1 e P_2 gli estremi del trattino $\overrightarrow{\Delta s}$, *m* la massa del corpo, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità del corpo rispettivamente in P_1 e P_2 . Ovviamente la velocità media $\vec{v}$ del corpo nel tratto $\overrightarrow{\Delta s}$ sarà:

$$\vec{v}=\frac{\vec{v}_2+\vec{v}_1}{2}$$

Per le ipotesi fatte, nel tratto $\overrightarrow{\Delta s}$ (che è piccolo) la velocità non varierà molto, pertanto possiamo assumere che essa sia costante e pari al valore medio $\vec{v}=\frac{\vec{v}_2+\vec{v}_1}{2}$; dalla legge oraria del moto uniforme sappiamo che:

$$\overrightarrow{\Delta s}=\vec{v}\,\Delta t=\frac{\vec{v}_2+\vec{v}_1}{2}\Delta t$$

Inoltre, per il secondo principio della dinamica, avremo:

$$\vec{R}=m\vec{a}=m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\Delta t}$$

Usando pertanto le ultime due formule, possiamo finalmente valutare il lavoro relativo al tratto $\overrightarrow{\Delta s}$:

$$\vec{R}\cdot\overrightarrow{\Delta s}=m\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\Delta t}\cdot\frac{\vec{v}_2+\vec{v}_1}{2}\Delta t=\frac{1}{2}m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_1)=\frac{1}{2}m(\vec{v}_2^{\,2}-\vec{v}_1^{\,2})=\frac{1}{2}m(v_2^{\,2}-v_1^{\,2})=\frac{1}{2}m v_2^{\,2}-\frac{1}{2}m v_1^{\,2}$$

cioè: $\vec{R}\cdot\overrightarrow{\Delta s}=E_{c2}-E_{c1}=\Delta E_{c12}$,

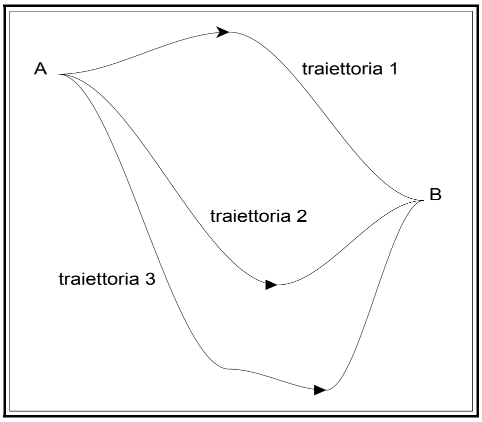
ovvero il lavoro compiuto dalla risultante $\vec{R}$ nel trattino $\overrightarrow{\Delta s}$ è pari alla variazione di energia cinetica del corpo tra i punti estremi del trattino; da quest'ultima osservazione ricaviamo immediatamente che il lavoro totale compiuto dalla risultante $\vec{R}$ in tutto il percorso AB è pari alla somma delle variazioni di energia cinetica nei singoli trattini, ovvero alla variazione totale tra *A* e *B*:

$$L_{AB}^{(R)}=Somma(\vec{R}\cdot\overrightarrow{\Delta s})=E_{cB}-E_{cA}$$

ENERGIA POTENZIALE E TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica dimostrato nel paragrafo precedente ci permette di ricavare un risultato fondamentale della Meccanica, che poi sarà esteso a tutti i processi fisici: la conservazione dell'energia. Vediamo come va impostato il discorso.
Diamo innanzitutto la seguente definizione:

> Una forza si dice *conservativa* se il lavoro da essa compiuto relativamente ad un dato spostamento AB NON dipende dal particolare percorso, ma solo dai punti iniziale A e finale B



Per esempio, nella situazione mostrata in figura $\vec{F}_i$ è conservativa se si avrà che

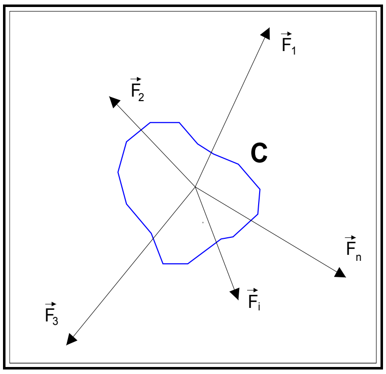
$$L_{AB1}^{(F_i)}=L_{AB2}^{(F_i)}=L_{AB3}^{(F_i)}\ ,$$

essendo $L_{AB1}^{(F_i)}, L_{AB2}^{(F_i)}$ e $L_{AB3}^{(F_i)}$ i lavori compiuti da $\vec{F}_i$ relativamente ai tre diversi percorsi.

Data, dunque, una forza conservativa, il lavoro da essa compiuto relativamente a uno spostamento AB non dipende dal particolare percorso per andare da A a B, ma solo dai due estremi in questione. Pertanto il lavoro in questione potrà essere espresso come differenza dei valori che un'opportuna funzione assume nei due punti:

$$L_{AB}^{(F_i)} = E_{pA} - E_{pB}$$

La funzione E_p della precedente relazione dipende solo dal punto considerato e si chiama energia potenziale relativa alla forza $\vec{F}_i$. Dunque E_{pA} ed E_{pB} sono i valori che E_p assume rispettivamente in A e in B.
Esempi di forze conservative sono la forza gravitazionale, la forza elastica e la forza elettrostatica; esempi di forze non conservative sono la forza di attrito e le forze motrici (per esempio quelle esercitate da un motore sull'automobile o dalla mano sulla penna per scrivere).
Se ora torniamo alla figura seguente:



possiamo immaginare che di tutte le forze alcune siano conservative e altre no. Dunque il lavoro compiuto dalla risultante di $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ si potrà esprimere come:

$$L_{AB}^{(R)} = L_{AB}^{(cons)} + L_{AB}^{(non\ cons)} \quad ,$$

dove $L_{AB}^{(cons)}$ e $L_{AB}^{(non\ cons)}$ sono rispettivamente i lavori compiuti dalle forze conservative e dalle forze non conservative.
Inserendo, ora, la formula precedente nell'espressione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica, abbiamo:

$$L_{AB}^{(R)} = E_{cB} - E_{cA} \quad \Longrightarrow \quad L_{AB}^{(cons)} + L_{AB}^{(non\ cons)} = E_{cB} - E_{cA}$$

cioè, sostituendo al posto di $L_{AB}^{(cons)}$ la differenza dell'energia potenziale tra A e B:

$$L_{AB}^{(cons)} + L_{AB}^{(non\ cons)} = E_{cB} - E_{cA} \quad \Longrightarrow \quad E_{pA} - E_{pB} + L_{AB}^{(non\ cons)} = E_{cB} - E_{cA}$$

che, riordinata, fornisce il fondamentale risultato:

$$\boxed{L_{AB}^{(non\ cons)} + E_{pA} + E_{cA} = E_{cB} + E_{pB}}$$

Se chiamiamo *energia meccanica* E_m posseduta dal corpo in un certo punto dello spazio la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, sicché $E_m = E_p + E_c$, possiamo scrivere la precedente formula in questo modo:

$$\boxed{L_{AB}^{(non\ cons)} + E_{mA} = E_{mB}} \quad , \qquad \text{ovvero:}$$

Il lavoro compiuto da tutte le forze non conservative su un corpo relativamente allo spostamento AB è pari alla variazione di energia meccanica subita dal corpo stesso: $\boxed{L_{AB}^{(non\ cons)} = E_{mB} - E_{mA}}$

Per esempio, se su un corpo agiscono forze d'attrito (freni), l'energia meccanica totale diminuirà; se invece agiscono forze motrici aumenterà.

Dal precedente risultato si ricava anche il fondamentale

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

> *Se su un corpo agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica totale del corpo relativamente a qualunque spostamento si conserverà.*

Noi abbiamo ricavato il precedente risultato come teorema, poiché l'abbiamo dimostrato. In realtà esso è espressione di un principio molto più generale, qualora considerassimo, oltre all'energia meccanica, altre forme di energia (termica, nucleare ecc...):

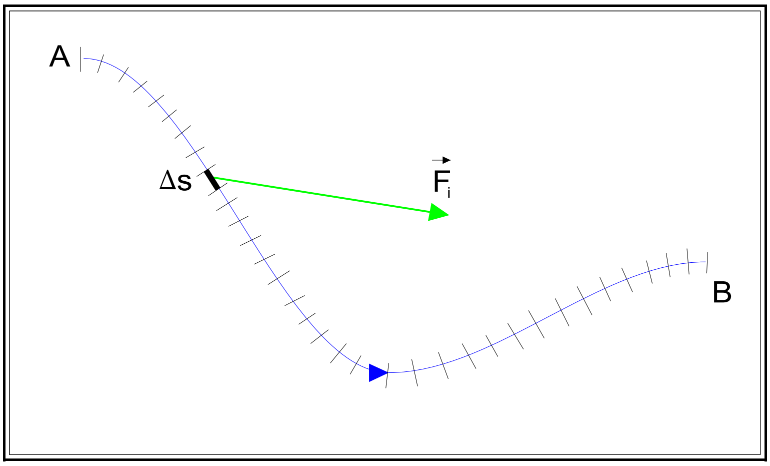
PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

> *In un qualunque sistema fisico, l'energia totale si conserva.*

Le dimensioni del lavoro (e dell'energia) sono: $[L]=M\cdot L^2\cdot T^{-2}$
L'unità di misura del S.I. è il joule, con simbolo J.

POTENZA

Consideriamo di nuovo la situazione descritta dalla figura seguente (nelle ipotesi già precisate):



Si definisce *potenza* sviluppata (o erogata) in un certo istante dalla forza $\vec{F}_i$ il lavoro riferito all'unità di tempo compiuto da $\vec{F}_i$ relativamente allo spostamento (piccolo) $\overrightarrow{\Delta s}$, cioè, in formule:

$$P^{(F_i)}=\frac{L_{\Delta s}^{(F_i)}}{\Delta t}=\frac{\vec{F}_i\cdot\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t}=\vec{F}_i\cdot\vec{v}$$

Pertanto, come mostrato nei passaggi precedenti, la potenza in un certo istante può valutarsi anche come prodotto scalare della forza per la velocità istantanea del corpo.
Se la potenza è una quantità positiva, si parla di potenza sviluppata o erogata dalla forza; se è negativa, si parla di potenza assorbita.
Le dimensioni della potenza sono: $[P]=M\cdot L^2\cdot T^{-3}$
L'unità di misura del S.I. è il watt, con simbolo W.