CARDINALITA': INSIEMI FINITI E INFINITI

Insiemi equipotenti

Due insiemi A e B si dicono equipotenti se esiste una corrispondenza biunivoca f tra i due:

f: A→B.

Cardinalità o potenza di un insieme

Si chiama “cardinalità” di un insieme A la famiglia di tutti gli insiemi equipotenti ad A; si indica con $|A|$.

Esempio

Consideriamo la corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali N={0, 1, 2, 3 ...} e l'insieme dei quadrati perfetti QP={0, 1, 4, 9, 16, 25...} che associa ad ogni numero naturale il suo quadrato:

0 ↔ 0; 1 ↔ 1; 2 ↔ 4; 3 ↔ 9; 4 ↔ 16 ecc...

Si deduce che N è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio:

N e QP hanno la stessa cardinalità!

L'esempio precedente mette in luce una proprietà fondamentale degli insiemi infiniti che non è posseduta dagli insiemi finiti (cioè insiemi formati da un numero finito di elementi): gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità di opportuni loro sottoinsiemi! Ciò ovviamente non può essere vero per gli insiemi finiti.

INSIEMI NUMERABILI

Un insieme si dice “numerabile” se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali N = {0, 1, 2, 3 ...}. La cardinalità di N si indica con la prima lettera dell'alfabeto ebraico con pedice 0: $\aleph_0$ (da leggersi “aleph zero”).

Ora ci apprestiamo ad enunciare via via una serie di definizioni, di proprietà e di teoremi (le dimostrazioni si trovano in qualunque libro di Algebra o di Teoria degli insiemi).

- Un sottoinsieme di un insieme numerabile è finito o numerabile.
- Dati due insiemi A e B, diremo che A ha cardinalità maggiore di B se esiste una corrispondenza biunivoca tra B ed un sottoinsieme proprio di A, ma non esiste una corrispondenza biunivoca tra B ed A.
- Con le cardinalità si usano i simboli di: “>” (maggiore), “<” (minore) e “=” (uguale).
- Se A è un insieme finito, ovviamente $\aleph_0 > |A|$.
- Se A è un insieme finito con n elementi, $|P(A)| = 2^n$.

PRIMO TEOREMA DI CANTOR

> *L'unione di una quantità finita o numerabile di insiemi finiti o numerabili è un insieme di potenza al più numerabile.*

Il teorema precedente si dimostra con una tecnica di diagonalizzazione: dopo aver disposto per righe gli elementi di ogni insieme, si comincia a costruire una successione di elementi considerando progressivamente tutti quelli che si trovano in diagonali parallele sempre più distanti dall'origine.

Il teorema è molto importante: permette di affermare che:

- Z è numerabile.
- Q è numerabile.
- Z^n è numerabile.
- L'insieme dei polinomi a coefficienti interi è numerabile (ciò significa che l'insieme dei numeri algebrici è numerabile).

SECONDO TEOREMA DI CANTOR

> *L'insieme delle parti di A, cioè P(A), ha cardinalità maggiore della cardinalità di A.*

Il precedente teorema è importantissimo, anche per le possibili applicazioni metafisiche:

> *possono le metafisiche immanentistiche (panteismo) pretendere di concepire Dio come **totalità onnicomprensiva di relazioni**?*

La risposta è negativa poiché ciò è intrinsecamente contraddittorio. Tale totalità andrebbe

> «intesa come totalità attualmente infinita di relazioni, visto che deve contenere in sé tutte le relazioni possibili. Ma Tommaso dimostra ben prima di Cantor e Goedel che un tale concetto di infinità attuale di tutte le relazioni possibili è intrinsecamente contraddittorio, perché lo è già per un sottoinsieme di queste relazioni possibili: i numeri interi (positivi) e tutte le loro combinazioni, generati dall'unità e dalla relazione che pone il successore n+1 (il *binarius*, come lo definiva Tommaso) Infatti, se si ponesse una tale totalità,
>
> > "ne seguirebbe che vi sarebbero relazioni *attualmente* infinite *nel medesimo*, poiché i numeri infiniti in potenza (dunque un sottoinsieme delle totalità delle relazioni possibili, N.d.R.) sono comunque *maggiori* del successore iniziale (*binarius*, la «duità» di Platone) sebbene esso li contenga tutti (*cum numeri infiniti in potentia sint maiores binario, quibus omnibus ipse est prior*)." (S. c. Gent., II, 12, 915) ». (G. Basti, *Filosofia della natura e della scienza*, Lateran University Press, pag. 372, Roma 2002).

Dio va piuttosto concepito come assolutamente semplice, e la relazione di ciascun ente con Dio (partecipazione) deve essere unidirezionale.

Ma ecco l'articolo in latino completo:

Contra Gentiles, lib. 2 cap. 12
Quod relationes dictae de Deo ad creaturas non sunt realiter in Deo

[24510] Contra Gentiles, lib. 2 cap. 12 n. 1 Huiusmodi autem relationes quae sunt ad suos effectus, realiter in Deo esse non possunt.

[24511] Contra Gentiles, lib. 2 cap. 12 n. 2 Non enim in eo esse possent sicut accidentia in subiecto: cum in ipso nullum sit accidens ut in primo libro ostensum est. Nec etiam possent esse ipsa Dei substantia. Cum enim relativa sint quae secundum suum esse ad aliud quodammodo se habent, ut philosophus dicit in praedicamentis, oporteret quod Dei substantia hoc ipsum quod est ad aliud diceretur. Quod autem ipsum quod est ad aliud dicitur, quodammodo ab ipso dependet: cum nec esse nec intelligi sine eo possit. Oporteret igitur quod Dei substantia ab alio extrinseco esset dependens. Et sic non esset per seipsum necesse-esse, ut in primo libro ostensum est. Non sunt igitur huiusmodi relationes secundum rem in Deo.

[24512] Contra Gentiles, lib. 2 cap. 12 n. 3 Item. Ostensum est in primo quod Deus omnium entium est prima mensura. Comparatur igitur Deus ad alia entia sicut scibile ad scientiam nostram, quod eius mensura est: *nam ex eo quod res est vel non est, opinio et oratio vera vel falsa est*, secundum philosophum in praedicamentis. Scibile autem licet ad scientiam relative dicatur, tamen relatio secundum rem in scibili non est, sed in scientia tantum: unde secundum philosophum, in V Metaph., scibile dicitur relative, non quia ipsum referatur, sed quia aliud refertur ad ipsum. Dictae igitur relationes in Deo non sunt realiter.

[24513] Contra Gentiles, lib. 2 cap. 12 n. 4 Adhuc. Relationes praedictae dicuntur de Deo non solum respectu eorum quae sunt actu, sed respectu eorum quae sunt in potentia: quia et eorum scientiam habet, et respectu eorum dicitur et primum ens et summum bonum. Sed eius quod est actu ad id quod non est actu sed potentia, non sunt relationes reales: alias sequeretur quod essent infinitae relationes actu in eodem, cum numeri infiniti in potentia sint maiores binario, quibus omnibus ipse est prior. Deus autem non aliter refertur ad ea quae sunt actu quam ad ea quae sunt potentia: quia non mutatur ex hoc quod aliqua producit. Non igitur refertur ad alia per relationem realiter in ipso existentem.

[24514] Contra Gentiles, lib. 2 cap. 12 n. 5 Amplius. Cuicumque aliquid de novo advenit, necesse est illud mutari, vel per se vel per accidens. Relationes autem quaedam de novo dicuntur de Deo: sicut quod est dominus aut gubernator huius rei quae de novo incipit esse. Si igitur praedicaretur aliqua relatio realiter in Deo existens, sequeretur quod aliquid Deo de novo adveniret, et sic quod mutaretur vel per se vel per accidens. Cuius contrarium in primo libro ostensum est.

Il secondo Teorema di Cantor si può dimostrare per assurdo, utilizzando in modo opportuno un metodo di diagonalizzazione.

Corollari:

- Ogni insieme infinito può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
- Un segmento è equipotente ad una retta
- Un segmento è equipotente ad un quadrato
- L'insieme delle parti di N, cioè P(N), ha cardinalità maggiore di $\aleph_0$. Tale

cardinalità è chiamata “cardinalità del continuo” ed è indicata con “ $\aleph_1$ ”. Risulta: $\aleph_0 < \aleph_1$. In particolare, l'insieme dei numeri reali ha la cardinalità del continuo.

Nell’ambito della teoria degli insiemi e in particolare nello studio della cardinalità, è nato un teorema molto importante: IL TEOREMA DI CANTOR-BERNSTEIN. In Matematica, il **teorema di Cantor-Bernstein-Shroeder** (a cui spesso si fa riferimento semplicemente come **teorema di Cantor-Bernstein**), afferma che:

Dati due insiemi A, B *se esistono due funzioni iniettive*
f: A → B,
g: B → A,
allora esiste una funzione bigettiva
h: A → B.

La definizione classica di $|A| \leq |B|$ (*"la cardinalità di A è minore o uguale della cardinalità di B"*), dove A e B sono due insiemi qualunque, è:

Esiste una funzione iniettiva da A in B.

Mentre la definizione di $|A| = |B|$ (*"A e B sono equipotenti"*) è:

Esiste una funzione bigettiva da A in B.

Ciò detto, il teorema di Cantor-Bernstein-Shroeder può essere riformulato come segue:

Se $|A| \leq |B|$ *e* $|B| \leq |A|$*, allora* $|A| = |B|$

Questo è proprio uno dei requisiti fondamentali che deve avere “<” per essere una relazione d'ordine parziale. Il teorema è quindi fondamentale per poter *ordinare gli insiemi in base alla loro cardinalità*. È da notare che, per stabilire che una tale relazione d'ordine è *totale,* è necessario supporre l'*assioma della scelta* (stabilisce che: data una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, esiste un insieme che contiene un unico elemento di ciascun insieme della famiglia).