LEGGI NOTEVOLI DELLA LOGICA DELLE PROPOSIZIONI

Principio d'identità

$$p \supset p$$
$$p \equiv p$$

Esprime il carattere riflessivo dell'implicazione materiale e dell'equivalenza.

Principio del terzo escluso

$$p \vee \neg p$$

Già noto ad Aristotele.

Principio di non contraddizione

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

Noto ad Aristotele.

Legge della duplice negazione

$$p \equiv \neg\neg p$$

Prima e seconda legge della tautologia

$$p \equiv (p \vee p) \qquad p \equiv (p \wedge p)$$

Legge di trasposizione (o di contrapposizione) semplice

$$(p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)$$

Tale legge è molto importante; era nota ad Aristotele. Ci dice che se in una teoria è vero il *teorema diretto* $p \supset q$, dove p è l'ipotesi e q è la tesi, allora è vero anche il *teorema contronominale* (o *contrapposto*) $\neg q \supset \neg p$. Ciò giustifica anche il procedimento di dimostrazione per assurdo, nell'ipotesi che il teorema sia espresso nella forma $p \supset q$.
Molto spesso chi non è avvezzo con la Logica compie l'errore di dire che, se è vero il teorema diretto $p \supset q$, allora è vero il *teorema inverso* (o *reciproco*) $q \supset p$ o anche il *teorema contrario* $\neg p \supset \neg q$.
Vale anche la seguente legge per l'implicazione: $(p \supset q) \equiv (\neg p \vee q)$.

La seguente legge sancisce l'equivalenza tra l'equivalenza e la mutua implicazione dei suoi argomenti:

$$(p \equiv q) \equiv (p \supset q) \wedge (q \supset p)$$

Questa legge spiega perché nella formulazione dei teoremi dove vale la mutua implicazione (cioè dove p e q sono equivalenti) si ricorre alle espressioni:

p se e solo se q

condizione necessaria e sufficiente perché sia vera p è che sia vera q.

Prima legge di De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

Mostra come trasformare una congiunzione in una disgiunzione. Era nota agli scolastici. E' spesso inconsapevolmente utilizzata nei ragionamenti comuni. Trova vasta applicazione anche in campo elettronico.

Seconda legge di De Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

Valgono considerazioni analoghe a quelle della precedente legge.

Sillogismo ipotetico (appartenente alla logica delle proposizioni)

Modus ponendo ponens $((p \supset q) \wedge p) \supset q$

Modus tollendo tollens $((p \supset q) \wedge \neg q) \supset \neg p$

I sillogismi ipotetici erano noti agli Stoici, che li chiamavano “indimostrabili”.

Sillogismo alternativo

Modus tollendo ponens $((p \vee q) \wedge \neg p) \supset q$

Si trova nell'opera del medico Galeno.

Sillogismo congiuntivo

Modus ponendo tollens $(\neg(p \wedge q) \wedge p) \supset \neg q$

Principio dell'argomentazione a fortiori

$(p \wedge q) \supset p$ $(p \wedge q) \supset q$

Si trova già nelle opere di Pietro Ispano.

Vale anche la legge:

$$p \supset (p \vee q)$$

Primo principio della riduzione all'assurdo (reductio ad absurdum)

$$(p \supset \neg p) \supset \neg p$$

Se una proposizione implica la sua negazione, questa proposizione è falsa. Sembra essere la più antica legge della logica delle proposizioni conosciuta nel mondo greco da Platone.

Secondo principio della riduzione all'assurdo

$$(p \supset (q \wedge \neg q)) \supset \neg p$$

Se una proposizione implica una contraddizione, questa proposizione è falsa.

Leggi del sillogismo ipotetico

$((p \supset q) \wedge (q \supset r)) \supset (p \supset r)$ (Teofrasto)

Importantissima e usatissima, sia nei ragionamenti comuni che nella scienza.

$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ (S. Alberto Magno)

$$(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$$

Leggi di trasposizione (o contrapposizione) complessa