Introduzione alla Logica dei predicati

La Logica delle proposizioni:

- considera solo funzioni con variabili proposizionali;
- è tale per cui il valore di verità di una proposizione complessa dipende SOLO dal valore di verità delle proposizioni componenti.

Ma... non tutti i ragionamenti possono essere espressi secondo la Logica delle proposizioni:

✔ se ogni M è P
e ogni S è M,
allora ogni S è P

E' vero che si potrebbe considerare il precedente sillogismo come una sostituzione della funzione:

$$p \wedge q \supset r$$

ma la precedente NON è una legge logica! Cioè non è sempre vera indipendentemente dal valore delle variabili proposizionali coinvolte.
La validità del precedente sillogismo, detto BARBARA, dipende manifestamente non solo dalla verità delle proposizioni componenti, ma anche dalle relazioni tra le parti di esse, cioè tra i termini. Si tratta dunque di analizzare le relazioni logiche tra questi: abbiamo così la Logica dei termini, che viene solitamente divisa in tre parti:

Logica dei termini		
Logica dei predicati	Logica delle classi	Logica delle relazioni

Nella Logica dei predicati si distinguono in una proposizione due elementi fondamentali:

- il predicato terminale;
- l'argomento (o gli argomenti).

✔ *Isidoro beve*
Isidoro è l'argomento del predicato terminale *beve*. Sostituendo a *Isidoro* una variabile, avremo:
x beve
Tuttavia, come regola generale di scrittura, in Logica formale si pone prima il predicato:
beve x

Indicheremo con:

- *x*, *y*, *z*... le variabili terminali;
- *a*, *b*, *c*... le costanti, cioè simboli che rappresentano nomi di oggetti singoli;
- *P*, *Q*, *R*... i predicati, costanti o variabili (simbolismo di Russell-Whitehead-Quine).

Alcune osservazioni:

I. I predicati possono essere mono- bi- tri- e, in generale, n-argomentali:
  - ✔ *Isidoro ama Giovanna* diventa: A(i, g), con ovvio significato dei simboli.

II. Una funzione proposizionale con variabili terminali può essere formalmente trattata come una proposizione. Dunque è lecito unire tali funzioni con predicati proposizionali:
  - ✔ *Se x beve allora y beve* si formalizza come: $B(x) \supset B(y)$
  - ✔ *Non è vero che x beve*: $\neg B(x)$
  - ✔ *x beve e y gioca*: $B(x) \wedge G(y)$

QUANTIFICATORI

Per tradurre proposizioni universali adoperiamo i quantificatori, che si scrivono innanzi alle variabili:

- Quantificatore universale: $\forall x$ "per ogni x"
- Quantificatore esistenziale: $\exists x$ "per alcuni x", "esiste almeno un x tale che"

- ✔ Se *M* indica il predicato *si muove*, l'espressione *qualche cosa si muove* si traduce in simboli: $\exists x M(x)$
- ✔ Se *M* indica il predicato *si muove*, l'espressione *per ogni x: x si muove* si traduce in simboli: $\forall x M(x)$

Variabili legate a un quantificatore si dicono vincolate *o legate,* non più *libere*.

Quando una funzione contiene variabili diversiformi, per costituire una quantificazione completa occorre assegnare un quantificatore a ciascuna di esse.

- ✔ $\forall x \forall y C(x, y)$ può ad esempio formalizzare:
  Ogni x è a contatto con ogni y

- ✔ $\exists x \forall y C(x, y)$ può ad esempio formalizzare:
  Qualche x è a contatto con ogni y
- ✔ $\forall x \exists y C(x, y)$ può ad esempio formalizzare:
  Ogni x è a contatto con qualche y, e si può anche leggere come
  Per ogni x esiste almeno un y tale che x è a contatto con y
- ✔ La definizione di limite finito *l* di una funzione *f(x)* di variabile reale *x* quando questa tende a un valore finito x_0 :

  $$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \ ((|x - x_0| < \delta) \wedge (x \neq x_0) \supset |f(x) - l| < \epsilon)$$

L'ordine dei quantificatori può essere arbitrariamente cambiato se tutti sono universali o tutti sono esistenziali, ma non lo può se alcuni sono universali e alcuni sono esistenziali.

- ✔ $\forall x \forall y C(x, y)$ è lo stesso che $\forall y \forall x C(x, y)$
  Ogni x è a contatto con ogni y
- ✔ $\forall x \exists y C(x, y)$ *non è lo stesso che* $\exists y \forall x C(x, y)$
  Tutti gli x sono a contatto con almeno un y
  Esiste almeno un y che è a contatto con tutti gli x