

RELAZIONI

PRODOTTO CARTESIANO

Dati due insiemi A e B non vuoti, si chiama *prodotto cartesiano* di A e B , e si denota con il simbolo $A \times B$, l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Se $A = B$, il prodotto cartesiano $A \times A$ si indica anche con il simbolo A^2 .

RELAZIONE

Dati due insiemi A e B , si chiama *relazione* $\mathcal{R}$ ogni sottoinsieme di $A \times B$.

Se $a \in A$ è in relazione con $b \in B$, allora si scrive $a \mathcal{R} b$.

Se $A = B$ si parla di *relazione binaria* nell'insieme A .

Una relazione binaria in un insieme non vuoto A può godere di particolari proprietà:

Proprietà riflessiva:

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ in un insieme A è riflessiva se ogni elemento di A è in relazione con se stesso, cioè quando per ogni elemento $a \in A$ si ha: $a \mathcal{R} a$.

Proprietà simmetrica:

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ in un insieme A è simmetrica quando dal fatto che $a \mathcal{R} b$, segue che $b \mathcal{R} a$.

Proprietà antisimmetrica:

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ in un insieme A è antisimmetrica quando da: $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} a$ segue: $a = b$.

Proprietà transitiva:

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ in un insieme A è transitiva se, qualunque siano $a, b, c \in A$, da: $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$ segue: $a \mathcal{R} c$.

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ in un insieme A è detta *relazione di equivalenza* se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza, allora due elementi di A che sono in relazione si dicono *equivalenti* rispetto a quella relazione.

Partizione di un insieme:

Si dice che più sottoinsiemi non vuoti di un insieme A costituiscono una *partizione* di A , se ogni elemento di A appartiene ad uno ed uno solo dei sottoinsiemi considerati.

CLASSI DI EQUIVALENZA

Si chiama *classe di equivalenza* nell'insieme non vuoto A , secondo una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$, il sottoinsieme di A costituito da tutti gli elementi che sono equivalenti ad un dato elemento $a \in A$.

Ogni classe di equivalenza è un insieme di tutti gli elementi equivalenti tra loro.
Ad ogni relazione di equivalenza in A , corrisponde una partizione di A in classi di equivalenza.

Insieme quoziente:

Si chiama *insieme quoziente* di un insieme A rispetto ad una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$, l'insieme che ha per elementi le classi di equivalenza di A rispetto ad $\mathcal{R}$.

RELAZIONE D'ORDINE

Si chiama relazione d'ordine in un insieme A , una relazione binaria $\mathcal{R}$ in A che sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Si dice, in tal caso, che l'insieme A è *ordinato dalla relazione* $\mathcal{R}$. Una generica relazione d'ordine viene di solito indicata, anziché con il simbolo $\mathcal{R}$, con il simbolo " $\leq$ ", in analogia all'ordinamento naturale dei numeri interi.

Ordine stretto:

Sia A ordinato dalla relazione " $\leq$ ". La relazione $\mathcal{R}$ definita da:
" a è in relazione con b se: $a \leq b$ e $a \neq b$
si dice *relazione di ordine stretto* su A .

Ordini totale e parziale:

Una relazione d'ordine $\mathcal{R}$ in A è detta *relazione d'ordine totale*, se due qualsiasi elementi sono confrontabili, cioè:

$$\forall (a, b) \in A^2 \text{ si ha: } a \mathcal{R} b \text{ oppure } b \mathcal{R} a.$$

In caso opposto, l'ordine è detto *parziale*.

Si noti che *una funzione da A in B non è altro che una particolare relazione sugli insiemi A e B .*