Il teorema di Cantor

DEFINIZIONE

Si dice cardinalità dell'insieme X la famiglia (denotata con $|X|$ *) degli insiemi equipotenti a X.*

$$|X|=\{Y \mid \exists f : X \to Y \quad biunivoca\}$$

Si verifica che due insiemi sono equipotenti se e solo se hanno la stessa cardinalità.
Sull'insieme delle cardinalità si definisce una relazione d'ordine (denotata con "≤") nel modo seguente:

$$|X| \le |Y| \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists f : X \to Y \quad iniettiva$$

Se $|X| \le |Y|$ e $|X| \ne |Y|$, scriveremo $|X| < |Y|$.

Il teorema seguente (di Cantor) mostra che la cardinalità di un insieme è inferiore a quella dell'insieme delle sue parti:

TEOREMA DI CANTOR

$$|X| < |\wp(X)|$$

Dimostrazione

La funzione

$$f : X \to \wp(X), \quad f(x)=\{x\} \qquad (x \in X)$$

è iniettiva, quindi $|X| \le |\wp(X)|$.
Supponiamo per assurdo che $|X| = |\wp(X)|$; esiste allora una funzione $g : X \to \wp(X)$ biunivoca. Definiamo

$$E=\{x \in X \mid x \notin g(x)\} \quad .$$

Dato che g è per ipotesi suriettiva, esiste $\bar{x} \in X$ tale che $g(\bar{x})=E$; ne segue

$$\bar{x} \in E \ \Rightarrow \ \bar{x} \notin g(\bar{x})=E \quad ,$$

$$\bar{x} \notin E \ \Rightarrow \ \bar{x} \in g(\bar{x})=E \quad .$$

La contraddizione prova la tesi.